**Министерство образования и науки РФ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**

**высшего профессионального образования**

**«Северо-Осетинский государственный университет имени   
Коста Левановича Хетагурова»**

**Факультет**: Математики и информационных технологий

Направление подготовки бакалавра

01.03.02 Прикладная математика и информатика

УЧЕБНАЯ ПРАКТИКА:

ПРАКТИКА ПО ПОЛУЧЕНИЮ ПЕРВИЧНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ

УМЕНИЙ И НАВЫКОВ

**Выполнил:**

Студент 1-го курса

Гамосов Станислав Станиславович

**Научный руководитель:**

Цахоева А.Ф.

г. Владикавказ

2019 г.

**Оглавление:**

Оглавление

1. [Введение 2](#_Toc13701228)
2. [Численное интегрирование 3](#_Toc13701229)
   1. [Метод прямоугольников 3](#_Toc13701230)
      1. [Метод левых прямоугольников 4](#_Toc13701231)
      2. [Метод правых прямоугольников 5](#_Toc13701232)
      3. [Метод средних прямоугольников 6](#_Toc13701233)
   2. [Метод трапеций 7](#_Toc13701234)
   3. [Метод Симпсона 9](#_Toc13701235)
   4. [Индивидуальный вариант №6 12](#_Toc13701236)
   5. [Код программы 12](#_Toc13701237)
3. [Численные методы решения нелинейных уравнений 15](#_Toc13701239)
   1. [Метод половинного деления (метод дихотомии) 16](#_Toc13701240)
   2. [Индивидуальный вариант №6 17](#_Toc13701241)
   3. [Код программы 19](#_Toc13701242)
   4. [Результат работы программы 20](#_Toc13701243)
4. [Метод Ньютона (метод касательных) 21](#_Toc13701244)
   1. [Индивидуальный вариант №6 22](#_Toc13701245)
   2. [Код программы 22](#_Toc13701246)
   3. [Результат работы программы 23](#_Toc13701247)
5. [Метод последовательных приближений 24](#_Toc13701248)
   1. [Индивидуальный вариант №6 24](#_Toc13701249)
   2. [Код программы 25](#_Toc13701250)
   3. [Результат работы программы 25](#_Toc13701251)
6. [Заключение 26](#_Toc13701252)
7. [Список литературы 27](#_Toc13701253)

# Введение

Численные методы являются отдельной областью математики и применяются в прикладных направлениях. В этой работе рассматриваются численные методы интегрирования и решения нелинейных уравнений. Наиболее используемыми методами численного интегрирования являются метод левых, правых, средних прямоугольников, метод трапеции и метод Симпсона, они и будут рассмотрены ниже. Для решения нелинейных уравнений будет использован метод дихотомии, метод Ньютона и метод последовательных приближений.

# Численное интегрирование

Вычисление некоторых интегралов по формуле Ньютона-Лейбница не всегда возможно т.к. многие подынтегральные функции не имеют первообразных в виде элементарных функций. В таких случаях мы можем воспользоваться численными методами нахождения определённого интеграла.

## Метод прямоугольников

Пусть функция y = f(x) ∈ C[a;b]. Нам требуется вычислить определенный интеграл.

Обратимся к понятию определенного интеграла. Разобьем отрезок [a,b] на n произвольных частей точками . На каждом из частичных интервалов [xi-1;xi], i = выберем точку ξi. Составим произведение:

(1)

Где – длина частичного полуинтервала.

Составим сумму всех таких произведений:

(2)

Формула *(2)* соответствует так называемой интегральной сумме.

***Теорема.***

*Если функция y = f(x) ∈ C[a;b], то предел интегральных сумм (2) существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка интегрирования на частичные интервалы, ни от выбора точек .*

**Определение**

Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b] называется предел интегральных сумм *(3)* при диаметре разбиения , не зависящий ни от способа разбиения отрезка интегрирования на частичные интервалы, ни от выбора точек .

Суть метода прямоугольников заключается в том, что в качестве приближенного значения определенного интеграла берут интегральную сумму.

### Метод левых прямоугольников

Если отрезок интегрирования [a;b] разбить на равные части длины h точками и в качестве точек выбрать *левые* границы элементарных отрезков [xi-1;xi], то мы получим приближенное равенство:

Перепишем его с учетом того, что

(4.1)

Формула *(4.1)*называется формулой левых прямоугольников, где:

– шаг разбиения отрезка [a;b].

Геометрически метод левых прямоугольников будет иметь следующий вид

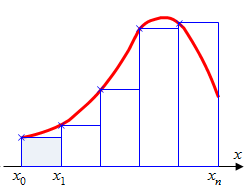


Рисунок 1. Метод левых прямоугольников

### Метод правых прямоугольников

Если отрезок интегрирования [a;b] разбить на равные части длины h точками и в качестве точек выбрать *правые* границы элементарных отрезков [xi-1;xi], то мы получим приближенное равенство:

Перепишем его с учетом того, что

 (4.2)

Формула (4.2)называется формулой правых прямоугольников, где:

– шаг разбиения отрезка [a;b].

Геометрически метод правых прямоугольников будет иметь следующий вид

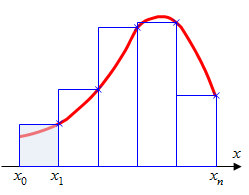


Рисунок 2. Метод правых прямоугольников

### Метод средних прямоугольников

Если отрезок интегрирования [a;b] разбить на равные части длины h точками и в качестве точек выбрать *середины* элементарных отрезков [xi-1;xi], то мы получим приближенное равенство:

Перепишем его с учетом того, что

(4.3)

Формула *(4.3)*называется формулой средних прямоугольников, где:

– шаг разбиения отрезка [a;b].

– середина i-того отрезка интегрирования.

Геометрически метод средних прямоугольников будет иметь следующий вид

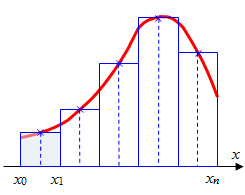
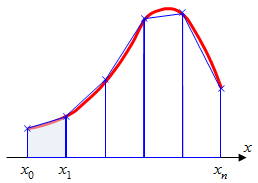


Рисунок 3. Метод средних прямоугольников

## Метод трапеций

Метод трапеций основан на кусочно-линейной интерполяции, т.е. на замене подынтегральной функции кусочками прямой на каждом из частичных интервалов.

Геометрически данный метод будет иметь следующий вид (рис.№4)

*Рисунок № 4*. Метод трапеций

При неограниченном увеличении числа точек разбиения так, чтобы , площадь фигуры, ограниченной сверху ломанной, снизу осью абсцисс, а слева и справа прямыми x = a и x = b соответственно, стремится к площади криволинейной трапеции.

Из графика очевидно:

1. Точка будет иметь координаты .
2. Площади заштрихованной фигуры соответствует площадь трапеции с основаниями и и высотой .

Складывая все возможные площади трапеций получим:

(5)

Таким образом:

(6)

Формула *(6)* называется формулой трапеций.

При постоянном разбиении , формула *(6)* принимает следующий вид:

Таким образом:

(6.1)

## Метод Симпсона

Данный метод основан на кусочно-квадратичной интерполяции, т.е. на замене подынтегральной функции кусочками параболы на каждом из частичных интервалов.

Разобьем отрезок интегрирования [a,b] на четное число равных частей: , , … , , где n = 2m. На каждом из интервалов , , … , подынтегральную функцию будем аппроксимировать (приближать) полиномом второй степени.

(7)

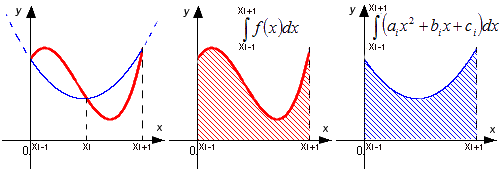
Графически метод Симпсона имеет следующий вид (рис.№5)

Рисунок № 5

Коэффициенты ,, могут быть найдены из условий

За полином можно также принять интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через точки ,

Исходные данные для решения поставленной задачи можно представить в виде таблицы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x |  |  |  |
| y |  |  |  |

 (8)

 (9)

Для получения формулы Симпсона вычислим интеграл:

Аналогично вычисляются интегралы и , в результате чего мы получаем, что:

Подставив полученные значения трех интегралов в формулу *(10)* получим:

(11)

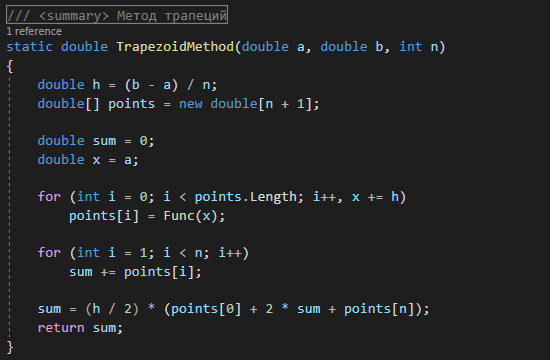
Обобщая формулу *(11)* на отрезке интегрирования []:

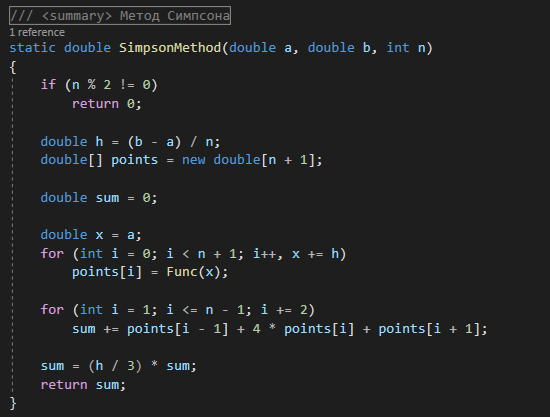
 (12)

Формула *(12)* называется формулой Симпсона.

### Индивидуальный вариант №6

### Код программы





Результат работы программы на первом примере

### 

Рисунок 6. Результат работы программы

Результат работы программы на втором примере

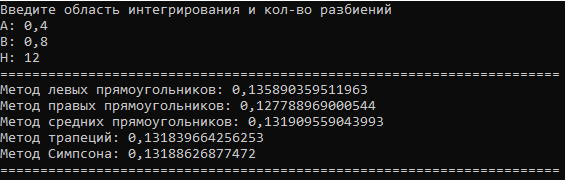


Рисунок 7. Результат работы программы

# Численные методы решения нелинейных уравнений

(13)

– нелинейная функция аргумента x.

Методы решения нелинейных уравнений вида *(13)* делятся на прямые и итерационные. Прямые методы позволяют выразить корни уравнения в явном виде с помощью формул. Нелинейные уравнение, встречающиеся на практике, как правило, прямыми методами решены быть не могут. В том случае, когда уравнение вида *(13)* не подлежит решению методами решения логарифмических, показательных, тригонометрических или простейших алгебраических уравнений, используются итерационные методы.

Алгоритм итерационных методов состоит из двух основных этапов:

1. Подбор начального приближения или интервала, содержащего искомый корень.
2. Последовательное уточнение начального приближения.

Начальное приближение может быть определено графическим способом. Кроме, можно найти интервал, на концах которого функция принимает значения разных знаков ( В этом случае отрезок [a;b] содержит хотя бы 1 корень.

Пусть – начальное приближение, принадлежащее отрезку [a;b]. В результате итерационного процесса формируется последовательность приближений

Если с ростом n эта последовательность сходится к истинному значению корня, то итерационный процесс называется сходящимся. В противном случае итерационный процесс называется расходящимся.

## Метод половинного деления (метод дихотомии)

Пусть [a,b] – отрезок, содержащий корень нелинейного уравнения *(13)*. Согласно методу дихотомии, в каждом из начальных приближений берется середина указанного интервала:

 (14)

Если ε – заданная точность решения поставленной задачи, то следующим шагом является проверка условия:

 (15)

При выполнении условия *(15)* *c* можно считать корнем уравнения *(13)*. В противном случае необходимо проанализировать отрезки [a;c] и [c;b]. Если , то искомый корень принадлежит отрезку [a;c], иначе корень уравнения принадлежит отрезку [c;b].

Если , то b = c, в противном случае a = c. Далее определяется следующее приближение и т.д.

### Индивидуальный вариант №6

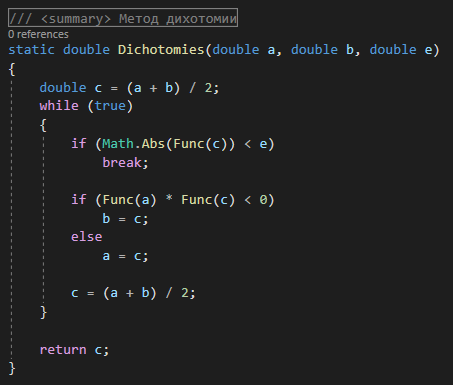
Пример №1

Рисунок 8. График для примера №1.

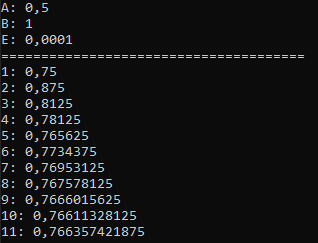
Пример №2

Рисунок 9. График для примера №2.

### Код программы



### Результат работы программы

Пример №1:

### 

Рисунок 10. Результат для примера №1.

Пример №2:

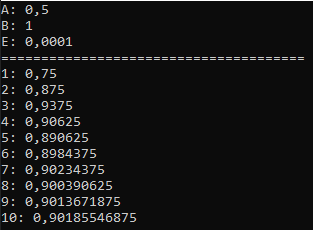


Рисунок 11. Результат для примера №2.

## 

## Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть при решении нелинейного уравнения *(13)* предварительно отделены корни (графически или аналитически). Отрезок [a;b] – один из промежутков, содержащих корень уравнения, причем и сохраняют свой знак всюду на указанном промежутке. Начальное приближение на отрезке [a;b] следует выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие:

 (16)

Которое означает, что функция и ее вторая производная имеют один и тот же знак в точке .

Уравнение касательной к функции в точке имеет вид:

(17)

Следующее приближение определяется, как точка пересечения касательной с осью абсцисс. Следовательно, для нахождения из уравнения *(17)* необходимо приравнять к нулю:

 (18)

Обобщая формулу *(18)* на весь интервал получим рекуррентное соотношение:

 (19)

Условие остановки алгоритма:

, – заданная точность.

### Индивидуальный вариант №6

Пример №1

Пример №2

### Код программы

### Результат работы программы

Пример №1

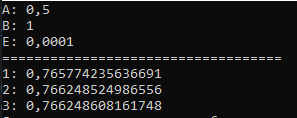


Рисунок 12. Результат для примера №1.

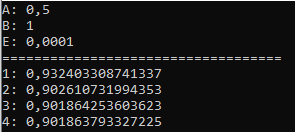
Пример №2

Рисунок 13. Результат для примера №2.

**Примечание.** Для нахождения данного корня методом Ньютона потребовалось 3 итераций (Рисунок 12), в то время как для нахождения корня методом дихотомии потребовалось 11 итераций (Рисунок 10). Так же и в случаи второго примера. Метод Ньютона (Рисунок 13) на данной функции работал 4 итерации, а метод дихотомии 10 (Рисунок 11).

## Метод последовательных приближений

Метод итераций решения нелинейного уравнения (13) предполагает выражение переменной x равносильным образом:

(20)

Пусть [a;b] – один из промежутков, содержащий корень уравнения. Начальное приближение из указанного промежутка должно быть определено таким образом, чтобы выполнялось условие сходимости:

(21)

Рекуррентное соотношение для определения последовательности приближений будет выглядеть следующим образом:

(22)

Условие остановки алгоритма:

,

где – заданная точность.

### Индивидуальный вариант №6

Пример №1

Пример №2

### Код программы

### 

### Результат работы программы

Пример№1

Рисунок 14. Результат для примера №1

Пример№2

Рисунок 15. Результат для примера №2

# 

# Заключение

В своей работе я рассмотрел различные численные методы. В частности, узнал и научился пользоваться алгоритмами для вычисления интегралов и решения нелинейных уравнений. Так же разобрался в реализации методов для языка программирования C#.

Благодаря полученному опыту мне удалось получить сведение об оптимальности и точности каждого алгоритма. В случае с численными методами интегрирования, я убедился, что метод Симпсона гораздо точнее, чем методы прямоугольников и трапеций.

Рассматривая численные методы решения нелинейных уравнений, мне удалось установить, что нахождение корня уравнения методом Ньютона выполняется намного быстрее, чем методами последовательных приближений и дихотомии.

# Список литературы

1. Вержбицкий В. М. «Основы численных методов». 2-e изд., пере-раб. / В. М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2005

2. Семушин И. В. «Численные методы алгебры» / И. В. Семушин. – Ульяновск: УлГТУ, 2006.

3.Численные методы анализа. Приближение функции, дифференциальные и интегральные уравнения

4. Калиткин Н.Н. Численные методы 2-е изд., исправленное. - СПБ БХВ-Петербург, 2011- 592 с

5. Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (г. Екатеринбург). М.:Издательство Юрайт 2018.